

# KMAP ゲイン最適化による 安定余裕要求を満足する多目的飛行制御設計

2017(H29). 9. 28

KMAP(ケーマップ)研究会 片柳亮二

多目的飛行制御設計の方法としては、 $H_\infty$ 制御，LMIによる制御，遺伝的アルゴリズム(GA)を用いた最適化など各種方法が研究されていますが，いずれも数学的に難解であることから，一般のエンジニアが簡単に利用するにはなかなか難しい方法と考えられます．

飛行制御の設計問題の場合には，求めるフィードバックゲインはせいぜい 4～5 個程度であるため，ここで述べる“KMAPゲイン最適化”の方法を用いることが有効です．しかも，多目的飛行制御系のフィードバックゲインも簡単に求めることができます．

KMAPゲイン最適化法では，Z接続法<sup>1)</sup>という方法によって制御系を構成します．これは制御系の各要素の入出力にZ番号を与えて，それらを接続することでフィードバック制御系を構成するもので，フィルタやフィードバックゲインを挿入した複雑な制御系を簡単な操作で構成することができます．

KMAPゲイン最適化法<sup>1)</sup>とは，制御系内のフィルタやフィードバックゲインの組み合わせを設定して，制御系における多目的の特性値を計算して最適解を求める方法です．ゲインの組み合わせ設定の方法としては，フィルタやゲインを適当に組み合わせで最適解を求めてもよいわけですが，これでは効率が悪いので，本手法では乱数を用いてゲインの組み合わせを作り，繰り返し計算にて最適な解を求めるモンテカルロ法といわれる方法です．繰り返し回数は 100 万回ですが，一般的なパソコンで数分程度で解が得られます．

以下，推力ベクタリングによるホバリング飛行の例題にて，KMAPゲイン最適化の方法について説明します．

## 1. 推力ベクタリングによるホバリング飛行の運動方程式

例題として、図 1.1 に示すように、推力ベクタリングによってホバリング飛行させる場合に、以下に示す多目的飛行制御設計問題として制御則を設計する。

図 1.1 において、傾き角を  $\theta$ 、推力ベクタリング角を  $\delta$ 、質量  $m=3.0$  (kg)、距離  $l=1.0$  (m)、重心まわりの慣性モーメントは、 $I=3.5$  (kg $\cdot$ m<sup>2</sup>) とする。このとき、運動方程式は次のように表される<sup>1)</sup>。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = A_p \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \\ \dot{x}_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + B_1 w + B_2 \cdot u, \quad z = \theta = C_1 x \quad (1.1)$$

ここで、右辺の行列は次のようである。

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ -\frac{mgl}{I} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

いま、 $m, l, I$  の値を挿入すると、次のようになる。

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.8 \\ -7.84 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

また、 $B_1$  および  $C_1$  行列は次とする。

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (1.4)$$

この制御対象の極・零点は次のようである。

$$\begin{cases} \text{極} & : s=0, 0, 0, 0 \\ x/z_1 \text{の零点} & : s=\pm 2.80 \\ \theta/z_1 \text{の零点} & : s=0, 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

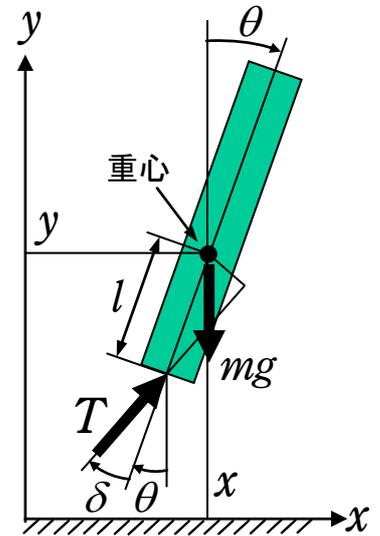


図 1.1 ホバリング飛行

## 2. 多目的飛行制御設計(その1)

(1.5)式に示したように、ホバリング飛行体は原点に極が4個あり、 $\theta/z_1$ の零点は原点に2個あるため、 $\theta$ を単独でフィードバックすると原点に極が2個留まってしまい安定化がうまくいかない。そこで、図2.1に示すように、制御対象の状態変数4個全てをフィードバックして安定化を図ることを考える。図2.1の状態変数Z6~Z9に対するゲイン $G_1 G_2 G_3 G_4$ は飛行体の状態フィードバックのゲインである

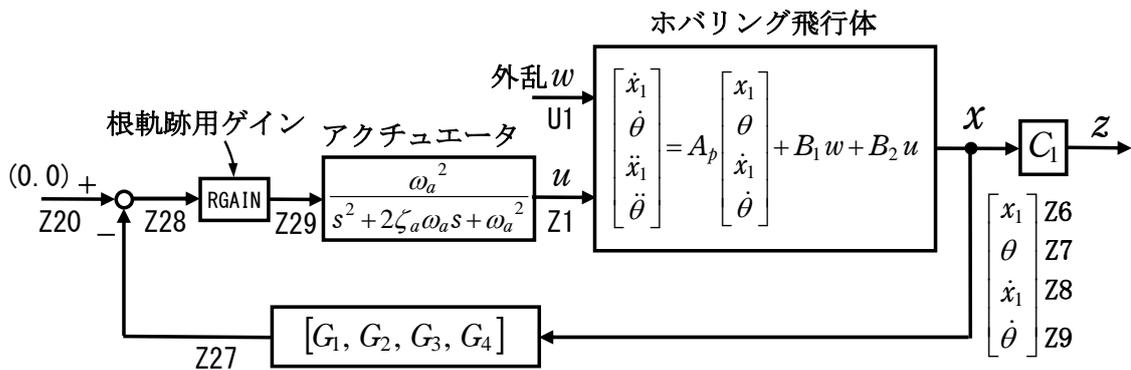


図 2. 1 推力ベクタリングによるホバリング飛行体の制御系

まず、基礎的な制御系として次の設計目的を考える。

設計目的①：アクチュエータを考慮する

設計目的②：振動極を左  $45^\circ$  のライン上に配置して安定化する

これらの設計目的をKMAPゲイン最適化法<sup>1)</sup>によって実現する。評価関数 $J$ は次式である。

$$J = \sum_{i=1}^n (\zeta_i - 0.7071)^2 - \text{重み係数} \times \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \quad (2.1)$$

ここで、 $\zeta_i$ はラプラス平面の上半面の極の減衰比である。また、実数極の場合は $\zeta_i=1$ としている。式内の数字の0.7071は、左 $45^\circ$ ライン上にある極の減衰比である。重み係数は、極位置をなるべく原点から遠い位置にして応答を速めるためのものである。 $\sigma_i + j\omega_i$ は極位置を表すが、極が実軸上の場合には重み係数を1/10としている。

この探索範囲によるKMAPゲイン最適化の結果、次のようにフィードバックゲインが求められる。

$$\begin{aligned} G_1 &= -2.074 \text{ [deg/m]}, & G_2 &= -7.778 \text{ [deg/deg]} \\ G_3 &= -1.452 \text{ [deg/(m/s)]}, & G_4 &= -2.852 \text{ [deg/(deg/s)]} \end{aligned}$$

図 2.2 は、極の存在範囲である．図中の●の点が最適な極位置を表す．

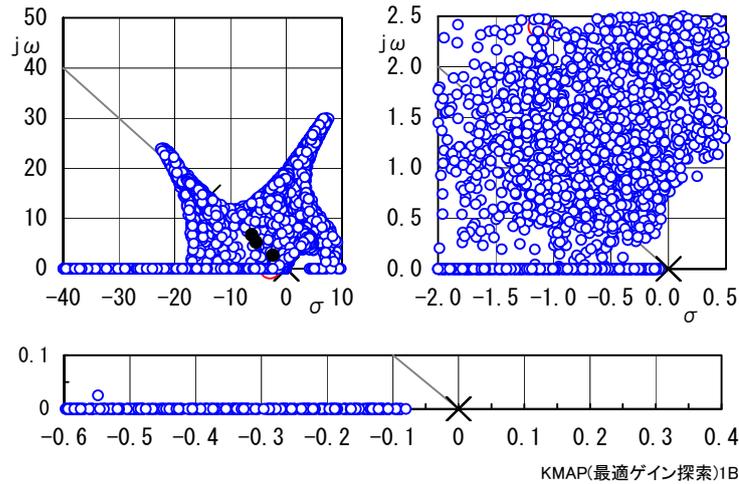


図 2.2 最適ゲイン探索  
(EIGE. ホバリング (状態 FB5A). Y170905. DAT)

ここで，探索された最適ゲインを用いて，根軌跡を表示すると図 2.3 のようになる．極が安定となっている (小さな○印) ことがわかる．なお，小さな□印はゲインを 2 倍にした場合で，虚軸上近くに極がくることから，ゲイン余裕が 6dB 以上あることを示している．

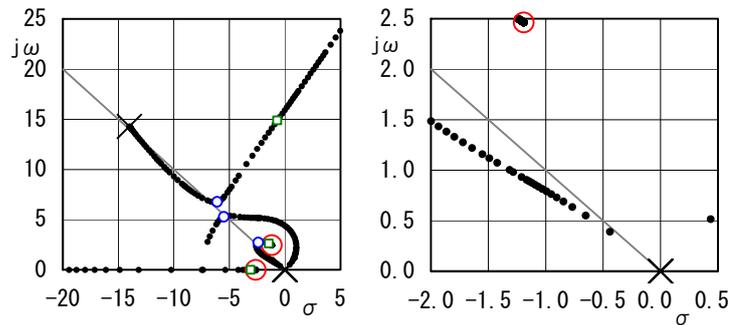


図 2.3 根軌跡

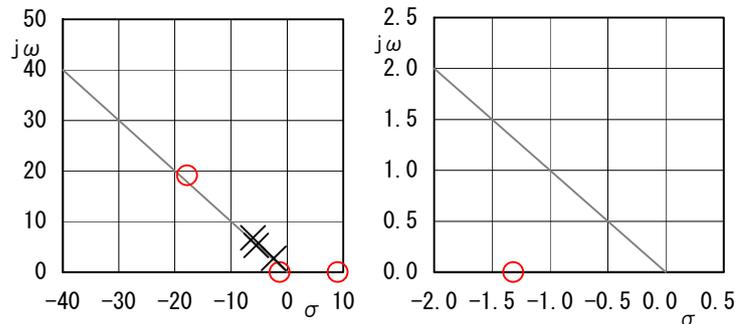


図 2.4  $\theta/w$  の極・零点配置

図 2.4 は， $\theta/w$  の極・零点配置である．原点にあった極は安定側に移動し，しかも左半面  $45^\circ$  ライン上に非常に安定な配置になっており，設計目的②が実現されていることがわかる．

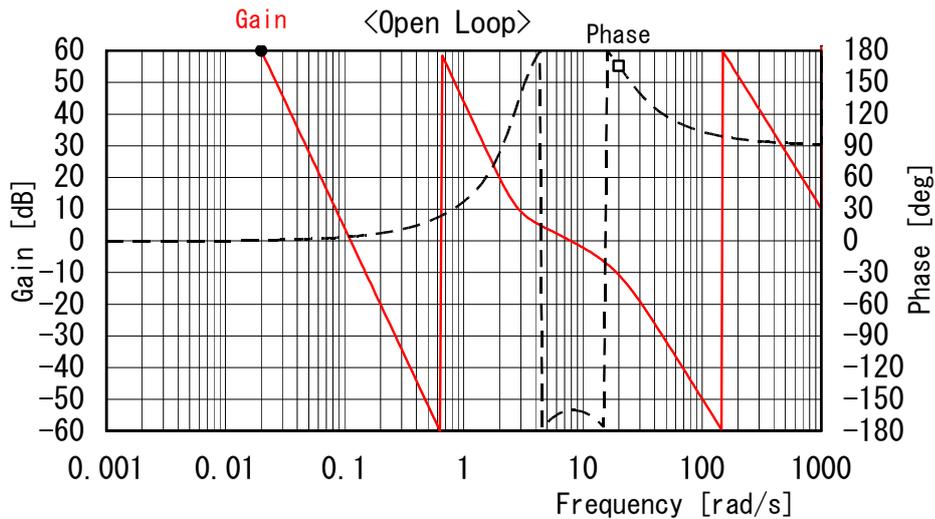


図 2.5 オープンループの周波数特性

表 2.1 図 2.5 の安定余裕

周波数(rad/s)	ゲイン余裕 (dB)	位相余裕(deg)
4.55	4.89	—
7.95	—	19.5
16.0	7.29	—
ゲイン余裕最小値=4.89 (dB), 位相余裕最小値=19.5 (deg)		

図 2.5 は、オープンループの周波数特性である。この安定余裕まとめると表 2.1 のようになる。ここで、ゲイン余裕に関する箇所は 2 つあり、この内、ゲイン余裕の 1 番目は安定のためにはゲインが 0 (dB) 以上必要である箇所である。この制御系の安定余裕はゲイン余裕 4.89 dB、位相余裕 19.5° である。

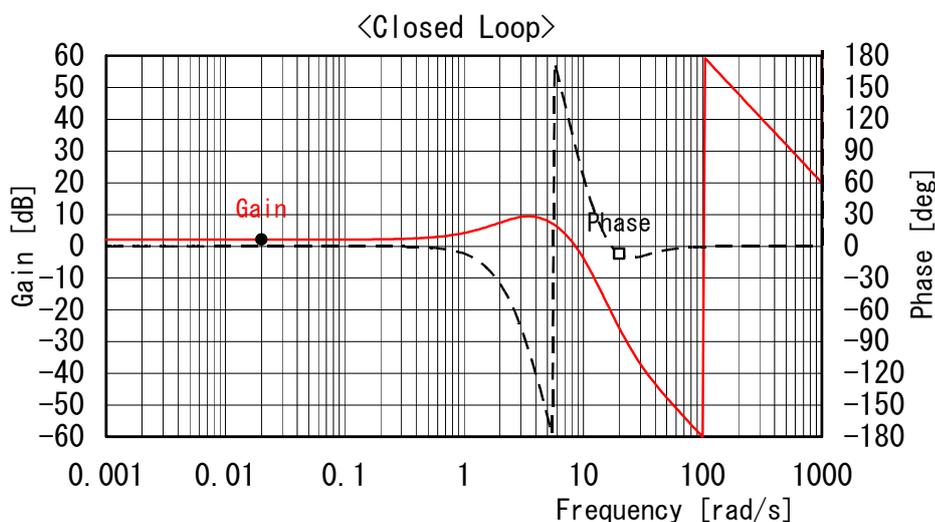


図 2.6 外乱応答  $\theta/w$  の周波数特性

図 2.6 は、外乱特性  $\theta/w$  のゲインと位相である。この伝達関数はスカラーであるので、このゲインは特異値に等しいものである。この図からゲインの最大

値  $H_\infty$  ノルムは 10dB である.

図 2.7 は, 外乱入力時のシミュレーションである. 外乱終了後には角度  $\theta$ , 位置  $x_1$  ともに元の状態に戻っていることがわかる.

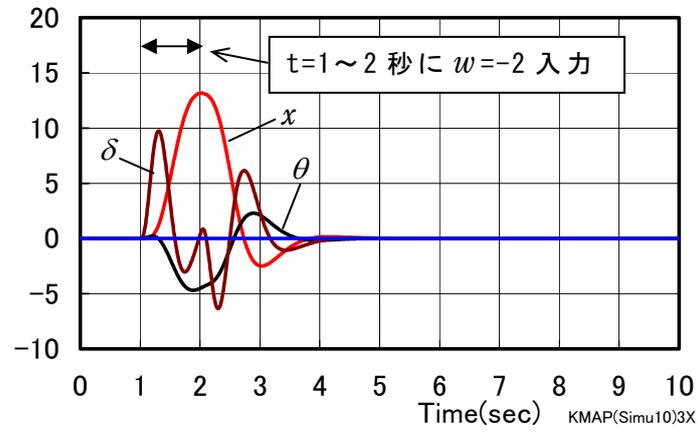


図 2.7 外乱入力シミュレーション  
( $w=1$  あたり  $\dot{\theta}=-10\text{deg/s}^2$  の外乱)

### 3. 多目的飛行制御設計(その2)

同じく図 2.1 の飛行体の状態フィードバック制御系について, 次の多目的飛行制御設計問題を考える.

設計目的①: アクチュエータを考慮する  
 設計目的②: ゲイン余裕 8dB 以上, 位相余裕 25° 以上で安定化  
 設計目的③: 外乱から姿勢角応答の  $H_{\infty}$  ノルムを 5dB 以下にする

KMAP ゲイン最適化の結果, 次のようにフィードバックゲインが求められる.

$$\begin{aligned} G_1 &= -0.2179 \text{ [deg/m]}, & G_2 &= -4.400 \text{ [deg/deg]} \\ G_3 &= -0.5332 \text{ [deg/(m/s)]}, & G_4 &= -1.639 \text{ [deg/(deg/s)]} \end{aligned}$$

図 3.1 は, 極の存在範囲である. 図中の●の点が最適な極位置を表す.

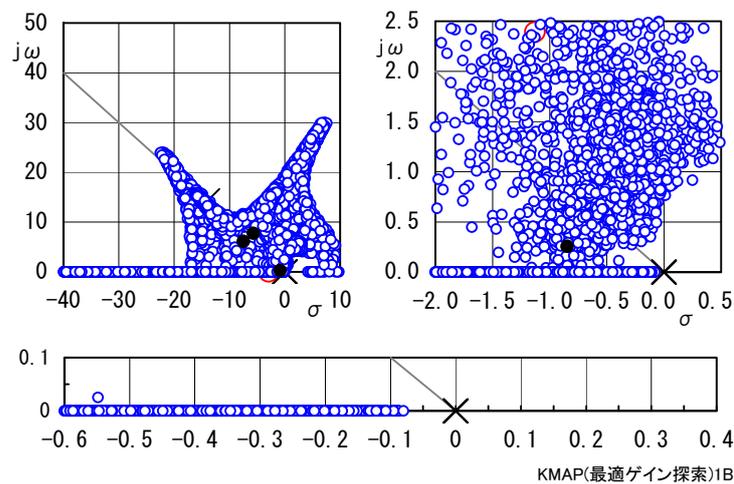


図 3.1 最適ゲイン探索  
 (EIGE.ホバリング(状態 FB31).Y170928.DAT)

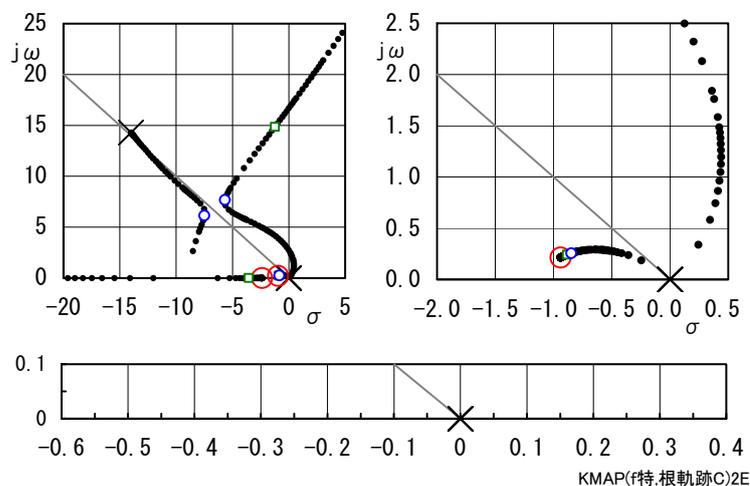


図 3.2 根軌跡

図 3.1 で探索された最適ゲインを用いて，根軌跡を表示すると図 3.2 のようになる．極が安定となっている(小さな青色の○印)ことがわかる．なお，小さな緑色の□印はゲインを 2 倍にした場合で，虚軸近くに極がくることから，ゲイン余裕が 6dB 程度以上あることを示している．

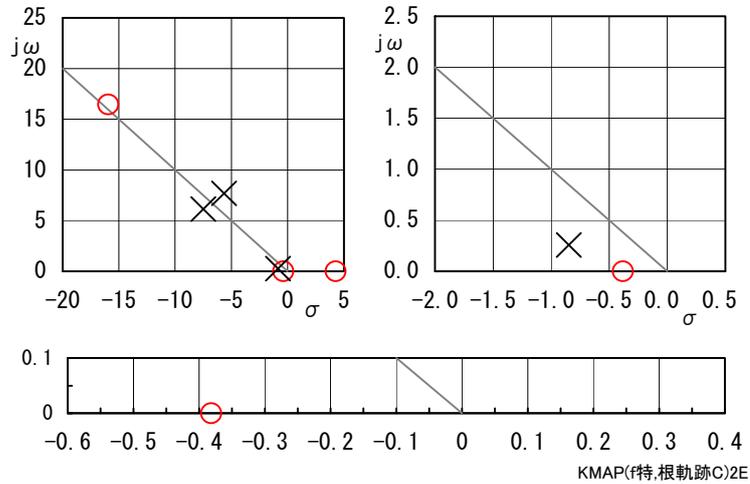


図 3.3  $\theta/w$  の極・零点配置

図 3.3 は， $\theta/w$  の極・零点配置である．原点にあった極は安定側に移動して，非常に安定な配置になっていることが確認できる．

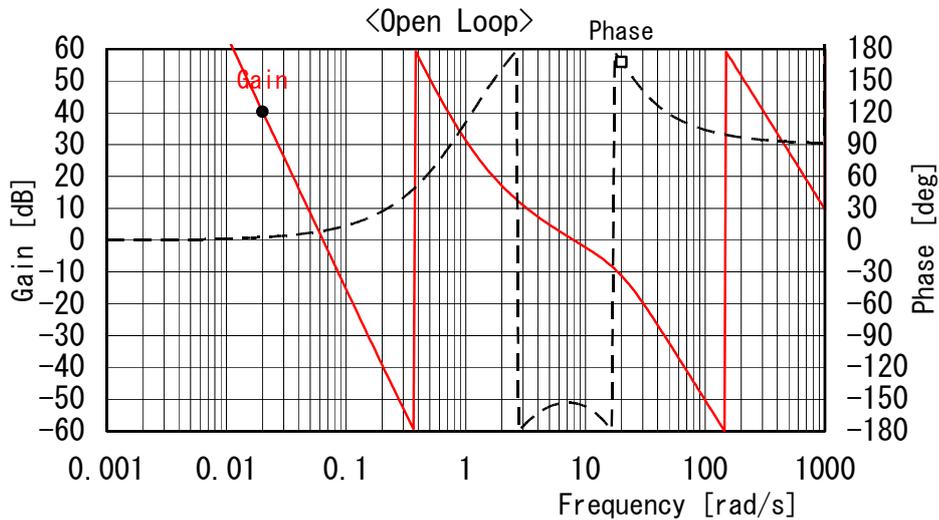


図 3.4 オープンループの周波数特性

表 3.1 図 3.4 の安定余裕

周波数(rad/s)	ゲイン余裕 (dB)	位相余裕(deg)
2.75	12.3	—
8.30	—	26.4
17.5	8.34	—
ゲイン余裕最小値 = 8.34 (dB), 位相余裕最小値 = 26.4 (deg)		

図 3.4 は、オープンループの周波数特性である．この安定余裕まとめると表 3.1 のようになる．ここで、ゲイン余裕に関する箇所は 2 つあり、この内、ゲイン余裕の 1 番目は安定のためにはゲインが 0 (dB) 以上必要である箇所である．この制御系の安定余裕はゲイン余裕 8.34dB、位相余裕 26.4° であり、**設計目的②が実現されている**ことがわかる．

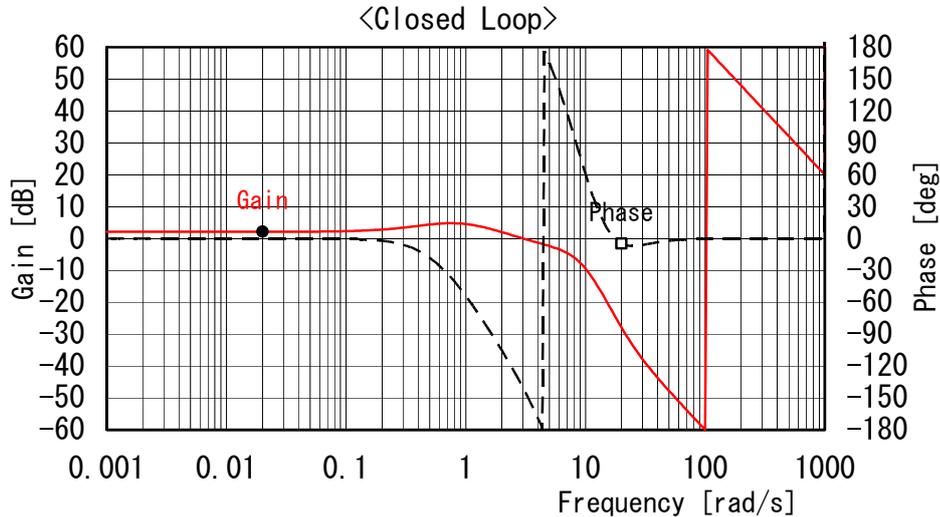


図 3.5 外乱応答  $\theta/w$  の周波数特性

図 3.5 は、外乱特性  $\theta/w$  のゲインと位相である．この伝達関数はスカラーであるので、このゲインは特異値に等しいものである．この図からゲインの最大値  $H_\infty$  ノルムは 5dB であり、**設計目的③が実現されている**ことがわかる．

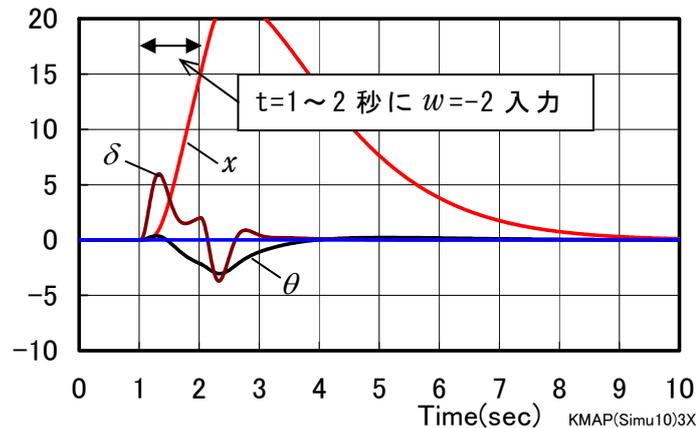


図 3.6 外乱入力シミュレーション  
( $w=1$  あたり  $\dot{\theta}=-10\text{deg/s}^2$  の外乱)

図 3.6 は、外乱入力時のシミュレーションである．外乱から姿勢角応答の  $H_\infty$  ノルムを 5dB 以下に設定した結果、図 2.7 に比較して飛行体の角度  $\theta$  の変動量は小さくなっていることがわかる．

ここで紹介したKMAPゲイン最適化の方法を用いると、航空機の制御系設計基準で規定されているゲイン余裕および位相余裕を指定して安定化したり、 $H_\infty$ ノルムを指定して外乱応答を低減化するなど、制御系のフィードバックゲインが直接的に簡単に実現できることがわかる。

---

#### 参考文献

- 1) 片柳亮二：例題で学ぶ航空制御工学，技報堂出版，2014.
- 2) 片柳亮二：Z接続法ゲイン最適化による飛行制御系設計，日本航空宇宙学会，第51回飛行機シンポジウム，2013年11月.
- 3) 片柳亮二：Z接続法ゲイン最適化による内部モデル制御を用いたピッチ角制御系，日本航空宇宙学会，第51回飛行機シンポジウム，2013年11月.
- 4) ホームページ <http://r-katayanagi.air-nifty.com/>

以上